



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 1. Przybliżone metody numeryczne

02.2026L

Dr hab. inż. Piotr MAREK , prof. uczelni, piotr.marek@pw.edu.pl

1. **MES II** (1W+1L)
 2. Wykłady (7x2 godz.+1godz. na kolokwium)
 3. Laboratoria komputerowe (15 godz.) → 4 spotkania środa 16-19 (bez przerw) od 22.04
 4. Konsultacje na MS Teams
 5. W semestrze przewidziane 1 kolokwium (oceniane w skali od 0 do 5) → 15 kwietnia
 6. Zaliczenie wykładu – ocena min. 2,75 (3-)
 7. Zaliczenie laboratorium – na zasadach ustalonych z prowadzącym lab.
 8. Zaliczenie przedmiotu – wymagane zaliczenie obu części (wykład i lab.)
- **Ocena końcowa** = $\frac{1}{2}W + \frac{1}{2}L$

Metody przybliżone w analizie ośrodków ciągłych

Wykład (15h):

1. Przypomnienie wiadomości z MES1
2. Stacjonarny przepływ ciepła i naprężenia termiczne.
3. Wprowadzenie do dynamiki konstrukcji, drgania swobodne.
4. Zagadnienia nieliniowe w mechanice konstrukcji - podstawowe techniki numeryczne.
5. **Zagadnienia nieliniowe materiałowo i kontakt**
6. Zagadnienia stateczności
7. Modelowanie kompozytów

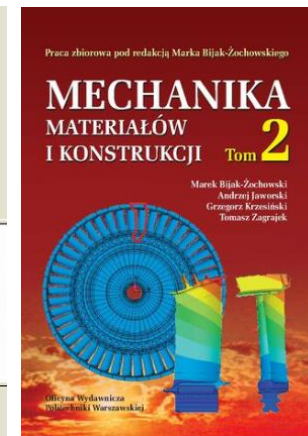
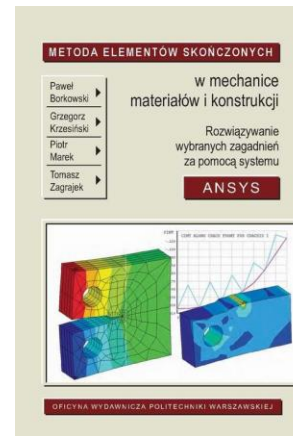
Od ósmego tygodnia nie będzie wykładów tylko Laboratorium w sali 129: środa 16-19

Grupa 1: 15.04; 29.04, 13.05, 27.05,

Grupa 2: 22.04; 06.05; 20.05; 10.06

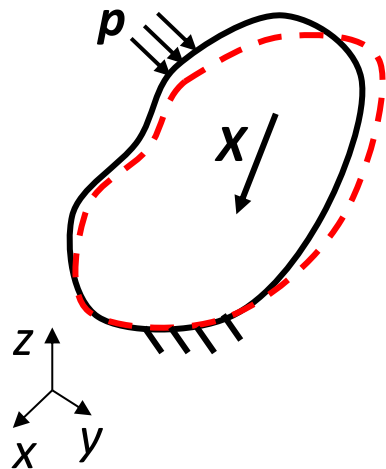
Laboratorium komputerowe (15h):

Modelowanie prostych zagadnień: naprężenia termiczne, zagadnienia kontaktu, plastyczność i naprężenia własne, drgania swobodne, wyboczenia konstrukcji powłokowej, modelowania parametrycznego i optymalizacji kształtu



1. Bijak-Żochowski M., Jaworski A., Krzesiński G., Zagrajek T.: **Mechanika Materiałów i Konstrukcji**, Tom 2, Of. Wyd. PW, 2023
2. Borkowski P., Krzesiński G., Marek P., Zagrajek T.: **MES w mechanice materiałów i konstrukcji. Rozwiązywanie wybranych zagadnień za pomocą programu ANSYS**, Oficyna Wydawnicza PW, 2022
3. Bathe, K.J.: Finite Element Procedures. 2nd ed. Prentice Hall Inc., 2014. https://web.mit.edu/kjb/www/Books/FEP_2nd_Edition_4th_Printing.pdf
4. Bathe, K.J.: Finite Element Procedures in engineering practice, Prentice Hall Inc., 1981.
<https://soaneemrana.org/onewebmedia/Finite%20Element%20Procedures%20in%20Engineering%20Analysis%20Bathe%20K.J.pdf>
5. Huebner K.H., Dewhirst D.L., Smith D.E., Byrom T.G.: **The finite element method for engineers**, J. Wiley & Sons 2001
6. Kącki E.: **Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki**, Warszawa WNT 1992.
7. Kiełbasiński A., Schwetlick H.: **Numeryczna algebra liniowa**. WNT, 1992.
8. Kleiber M.(red): **Komputerowe metody mechaniki ciał stałych**, Warszawa PWN 1995.
9. Rakowski G., Kacprzyk Z.: **Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji**, Warszawa, Oficyna Wydawnicza PW, 1993.
10. Zienkiewicz O.C., Taylor R.: **The Finite Element Method**. – różne wydania
<http://ceb.ac.in/knowledge-center/E-BOOKS/The%20Finite%20Element%20Method%20Vol1%20-%20The%20Basis%20-%20R.%20Taylor.pdf>

Metody przybliżone w analizie ośrodków ciągłych



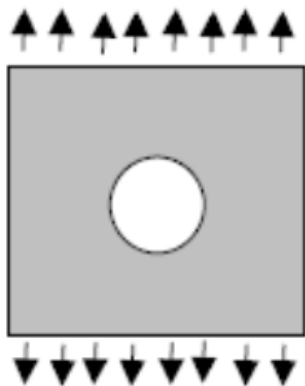
Konstrukcje odkształcalne mogą być badane:

- metodami doświadczalnymi (*koszt i czasochłonność*)
- metodami teoretycznymi:
 - analitycznymi (*tylko proste modele*)
 - numerycznymi (*metody przybliżone*) – MRS, MEB, **MES**

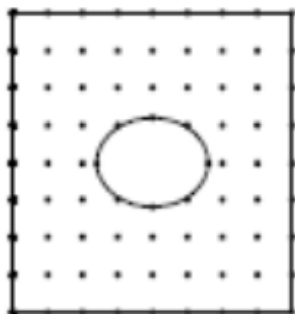
Metoda różnic skończonych (MRS)

Metoda elementów brzegowych (MEB)

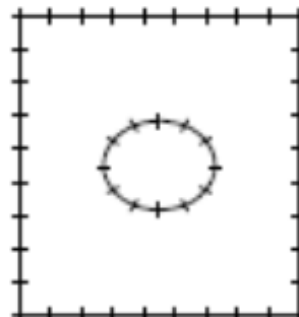
Metoda elementów skończonych (MES)



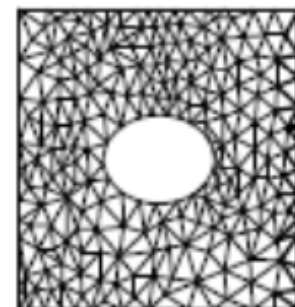
Równania różniczkowe cząstkowe



Całkowe równania brzegowe



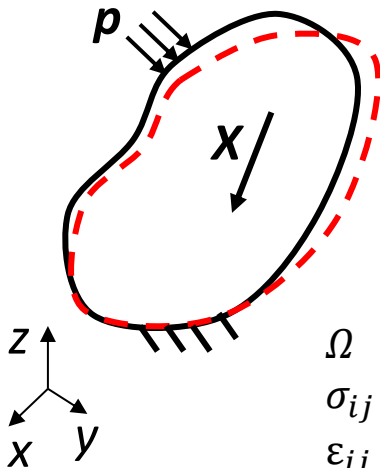
Minimalizacja funkcjonału



W metodach przybliżonych problem poszukiwania nieznanych funkcji (np. opisujących pole przemieszczeń) zastępowany jest przez problem poszukiwania skończonej liczby parametrów.

Zasada minimum całkowitej energii potencjalnej

Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji przedstawiana jest zwykle jako metoda przybliżona, wykorzystująca twierdzenie o minimum całkowitej energii potencjalnej układu odkształcalnego.



Całkowita energia potencjalna układu odkształcalnego:

$$V = U - W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} X_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma} p_i u_i d\Gamma$$

Ω – obszar, Γ – brzeg,
 σ_{ij} – tensor naprężenia,
 ε_{ij} – tensor odkształcenia

u_i – wektor przemieszczenia,
 p_i – obciążenie powierzchniowe,
 X_i – siły masowe

Zasada minimum całkowitej energii potencjalnej mówi, że:

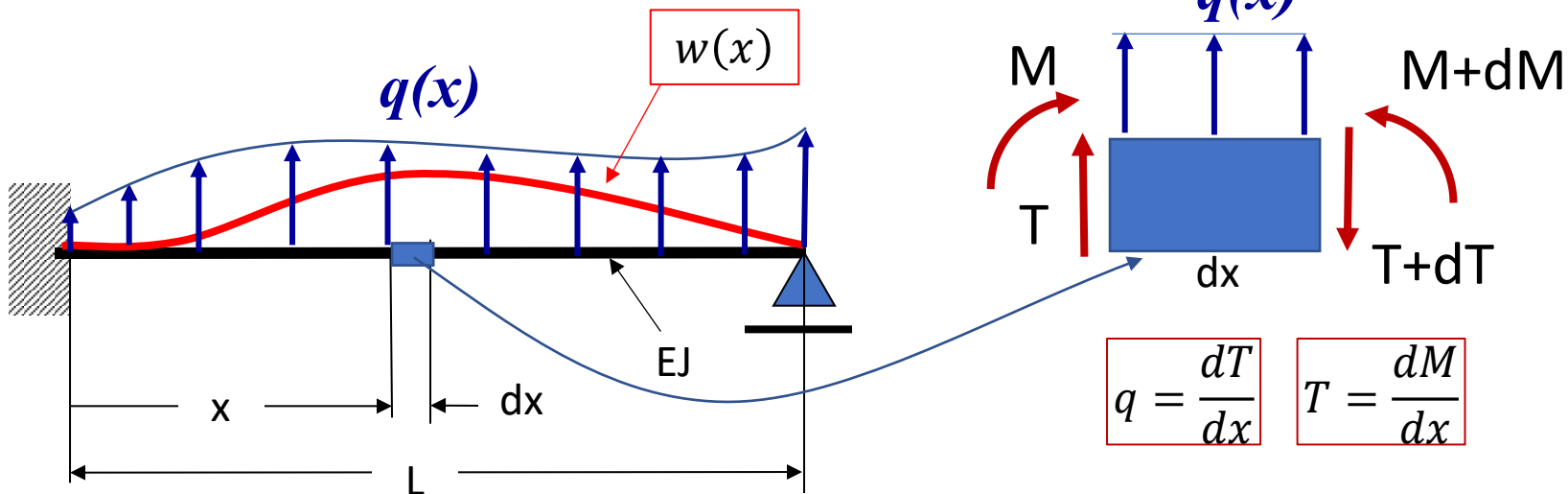
Ze wszystkich geometrycznie dopuszczalnych postaci przemieszczeń, którym może podlegać ustrój sprężysty, wystąpi ta, dla której funkcjonal całkowitej energii potencjalnej osiągnie wartość minimalną.

$$V = U - W = \min !$$

V – funkcjonal (poszukiwanej funkcji $u(\bar{x})$ przypisuje liczbę)

Minimalizacja funkcjonału jest zadaniem rachunku wariacyjnego

Przykład wyznaczenia linii ugięcia belki



Warunki brzegowe: $w(x=0) = 0$ $w(x=L) = 0$ $\frac{dw}{dx}(x=0) = 0$

Równanie różniczkowe

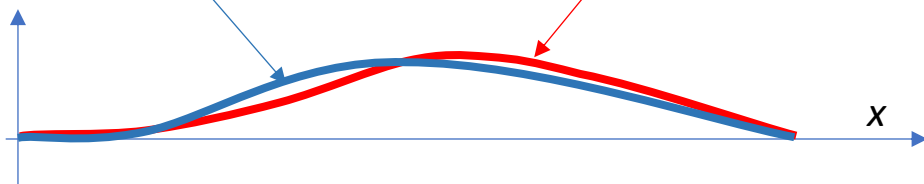
$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x) \quad \text{lub}$$

Zasada minimum całkowitej energii potencjalnej

$$V(w) = \frac{1}{2} \int_0^L EJ (w'')^2 dx - \int_0^L q(x) w(x) dx = \min$$

$\tilde{w}(x)$ – funkcja przybliżona

$w(x)$ - nieznana funkcja



Funkcja przybliżona (aproksymująca):

$$\tilde{w}(x) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(x)$$

Aproksymacja: parametryczna lub węzłowa
globalna lub lokalna

Metoda Ritza

(zamienia poszukiwanie minimum funkcjonatu w poszukiwanie minimum funkcji wielu zmiennych)

Wprowadźmy funkcję aproksymującą:
(może to być szereg potęgowy lub Fouriera)

$$\tilde{w}(x) = a_1 \cdot g_1(x) + a_2 \cdot g_2(x) + \dots + a_n \cdot g_n(x)$$

Funkcja aproksymująca jest kombinacją liniową nieznanych parametrów a_i i znanych funkcji geometrycznie dopuszczalnych $g_i(x)$

Po podstawieniu tej funkcji do wyrażenia na całkowitą energię potencjalną otrzymamy funkcję parametrów a_i :

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EJ (\tilde{w}'')^2 dx - \int_0^L q(x) \tilde{w}(x) dx$$



$$V = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

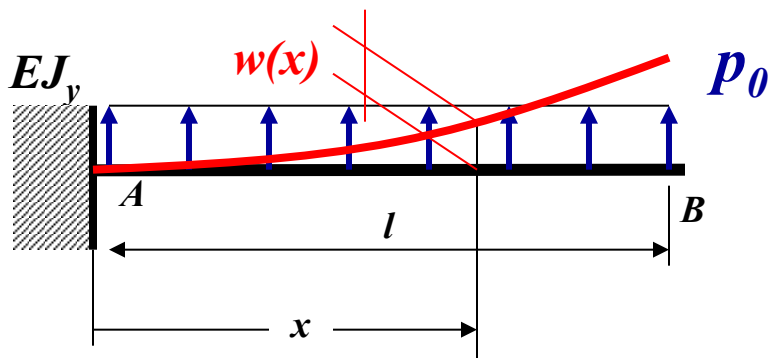
Teraz należy znaleźć minimum funkcji:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0$$

To jest układ n -równań algebraicznych liniowych



Zadanie 1: belka wspornikowa



Rozwiąż metodą Ritza belkę wspornikową używając daną funkcję aproksymującą:

$$\tilde{w}(x) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3$$

Warunki brzegowe: $\tilde{w}(x=0) = 0 \rightarrow a_1 = 0$ $\tilde{w}'(x=0) = 0 \rightarrow a_2 = 0$

Aby funkcja spełniała warunki geometryczne:

$$\tilde{w}(x) = a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3 \rightarrow \tilde{w}'(x) = 2a_3 \cdot x + 3a_4 \cdot x^2 \rightarrow \tilde{w}''(x) = 2a_3 + 6a_4 \cdot x$$

Energia potencjalna:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ [w''(x)]^2 dx - \int_0^l p_0(x) \cdot w(x) dx$$

Po podstawieniu funkcji aproksymującej:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ [\tilde{w}''(x)]^2 dx - \int_0^l p_0(x) \cdot \tilde{w}(x) dx$$

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (2a_3 + 6a_4 x)^2 dx - p_0 \int_0^l (a_3 x^2 + a_4 x^3) dx$$

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (4a_3^2 + 24a_3 a_4 x + 36a_4^2 x^2) dx - p_0 \int_0^l (a_3 x^2 + a_4 x^3) dx$$

Zadanie 1: belka wspornikowa (c.d.)

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (4a_3^2 + 24a_3a_4x + 36a_4^2x^2) dx - p_0 \int_0^l (a_3x^2 + a_4x^3) dx$$

$$V = \frac{EJ}{2} (4a_3^2x + 12a_3a_4x^2 + 12a_4^2x^3) \Big|_0^l - p_0 \left(\frac{1}{3} a_3x^3 + \frac{1}{4} a_4x^4 \right) \Big|_0^l$$

$$V = \frac{EJ}{2} (4a_3^2l + 12a_3a_4l^2 + 12a_4^2l^3) - p_0 \left(\frac{1}{3} a_3l^3 + \frac{1}{4} a_4l^4 \right)$$

Warunek minimum funkcji:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial a_3} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \frac{\partial V}{\partial a_3} = \frac{EJ}{2} (8la_3 + 12l^2a_4) - \frac{1}{3} p_0l^3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial a_4} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \frac{\partial V}{\partial a_4} = \frac{EJ}{2} (12l^2a_3 + 24l^3a_4) - \frac{1}{4} p_0l^4 = 0$$

$$a_3 = \frac{5}{24} \frac{p_0l^2}{EJ_y}$$

$$a_4 = -\frac{1}{12} \frac{p_0l}{EJ_y}$$

Ostateczna funkcja aproksymująca:

$$\tilde{w}(x) = \frac{5}{24} \frac{p_0l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0l}{EJ_y} \cdot x^3$$

Zadanie 1: belka wspornikowa (c.d.)

Ostateczna funkcja aproksymująca:

$$\tilde{w}(x) = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3$$

Przybliżenie momentu gnącego:

$$\tilde{M}_g = EJ_y \tilde{w}''(x) \rightarrow$$

$$\tilde{M}_g(x) = \frac{5}{12} p_0 l^2 - \frac{1}{2} p_0 l \cdot x$$

Przybliżenie siły tnącej:

$$\tilde{T} = EJ_y \tilde{w}'''(x) \rightarrow$$

$$\tilde{T}(x) = -\frac{1}{2} p_0 l$$

Rozwiązanie ścisłe:

$$w(x) = \frac{6}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{2}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \frac{p_0}{EJ_y} \cdot x^4$$

$$M_g(x) = \frac{1}{2} p_0 (l - x)^2$$

$$T(x) = -p_0 (l - x)$$

Zadanie 1: belka wspornikowa (c.d.)

Rozwiązanie przybliżone:

$$\tilde{w}(x) = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{1}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3$$

$$\tilde{M}_g(x) = \frac{5}{12} p_0 l^2 - \frac{1}{2} p_0 l \cdot x$$

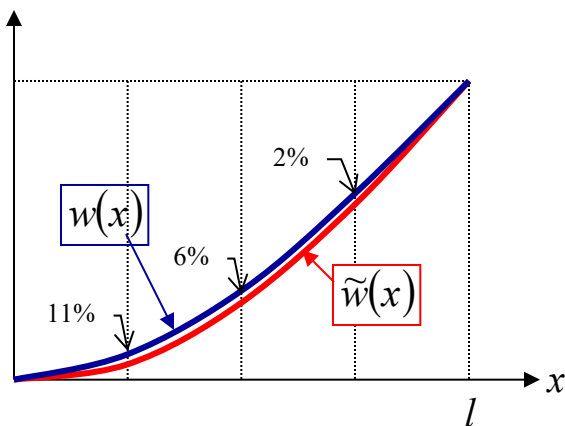
$$\tilde{T}(x) = -\frac{1}{2} p_0 l$$

Rozwiązanie ścisłe:

$$w(x) = \frac{6}{24} \frac{p_0 l^2}{EJ_y} \cdot x^2 - \frac{2}{12} \frac{p_0 l}{EJ_y} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \frac{p_0}{EJ_y} \cdot x^4$$

$$M_g(x) = \frac{1}{2} p_0 (l - x)^2$$

$$T(x) = -p_0 (l - x)$$



$$\tilde{w}(l) = 0.125 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$\tilde{w}(\frac{3}{4}l) = 0.082 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$\tilde{w}(\frac{1}{2}l) = 0.042 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

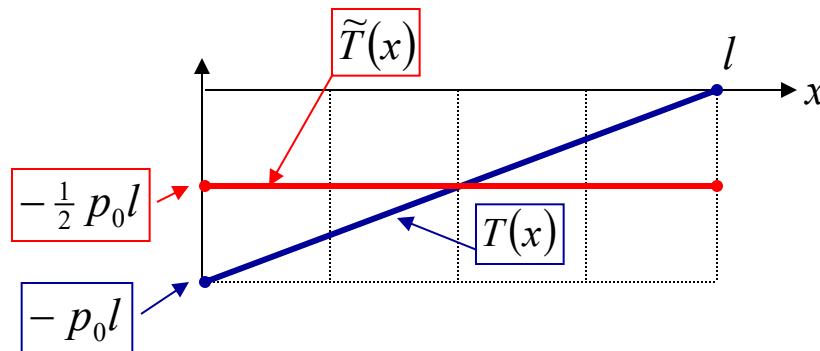
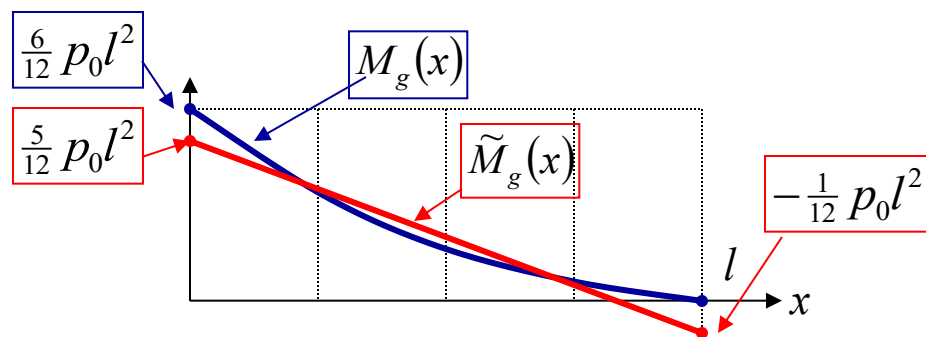
$$\tilde{w}(\frac{1}{4}l) = 0.012 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$w(l) = 0.125 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

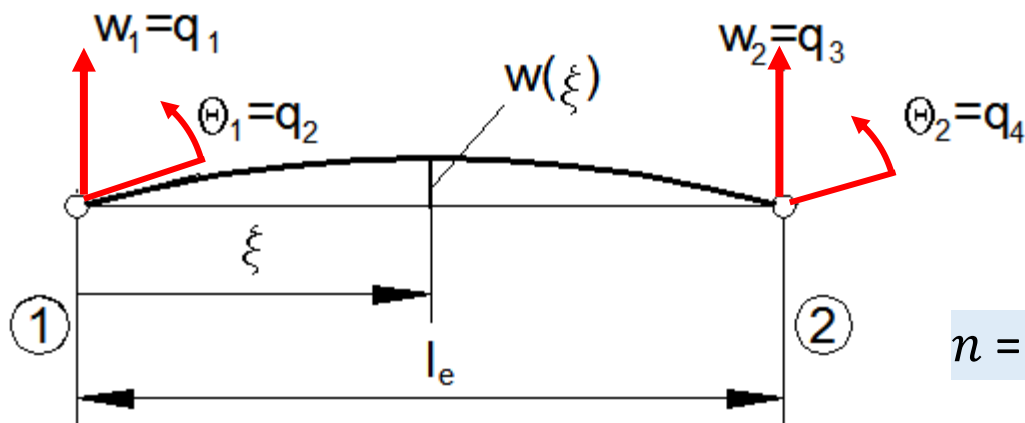
$$w(\frac{3}{4}l) = 0.084 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$w(\frac{1}{2}l) = 0.044 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$

$$w(\frac{1}{4}l) = 0.013 \frac{p_0 l^4}{EJ_y}$$



MES - Element belkowy (zginanie w jednej płaszczyźnie)



q_1, q_3 – przemieszczenia
poprzeczne w węzłach
 q_2, q_4 – kąty ugięcia w węzłach
(dodatnie znaki w kierunku
przeciwwzegladowym)

$$n = 2 \quad ; \quad n_p = 2 \quad \rightarrow \quad n_e = n \cdot n_p = 4$$

Założmy przybliżenie funkcji ugięcia w elemencie:

$$w(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3$$

Wymagane są jednak nowe parametry: $w_1, w_2, \theta_1, \theta_2$

Wektor parametrów węzłowych

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e$$

Aproksymacja węzłowa:

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi) q_i$$

$$w(\xi) = [N(\xi)] \{q\}_e,$$

Element belkowy - relacja pomiędzy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ i q_1, q_2, q_3, q_4

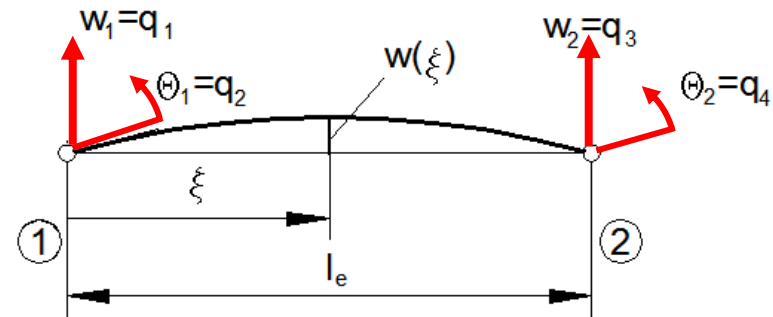
$$w(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3$$

przemieszczenie w węźle 1 $\rightarrow q_1 = w(0) = \alpha_1,$

kąt ugięcia w węźle 1 $\rightarrow q_2 = \frac{dw}{d\xi}(0) = \alpha_2,$

przemieszczenie w węźle 2 $\rightarrow q_3 = w(l) = \alpha_1 + \alpha_2 l_e + \alpha_3 l_e^2 + \alpha_4 l_e^3,$

kąt ugięcia w węźle 2 $\rightarrow q_4 = \frac{dw}{d\xi}(l) = \alpha_2 + 2\alpha_3 l_e + 3\alpha_4 l_e^2.$



W zapisie macierzowym:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l_e & l_e^2 & l_e^3 \\ 0 & 1 & 2l_e & 3l_e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l_e^2} & -\frac{2}{l_e} & \frac{3}{l_e^2} & -\frac{1}{l_e} \\ \frac{2}{l_e^3} & \frac{1}{l_e} & -\frac{2}{l_e^3} & \frac{1}{l_e^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e$$

Element belkowy – funkcje kształtu

Przemieszczenie aproksymowane można przedstawić w postaci:

$$w(\xi) = \begin{bmatrix} 1, \xi, \xi^2, \xi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi), N_4(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}$$

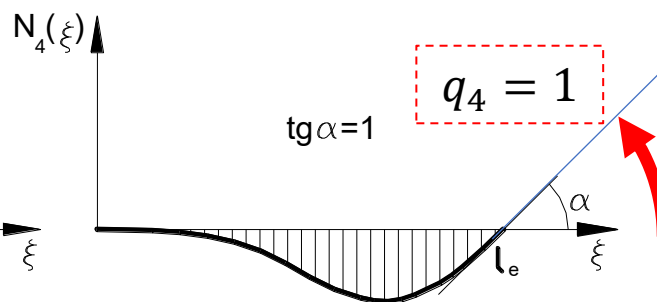
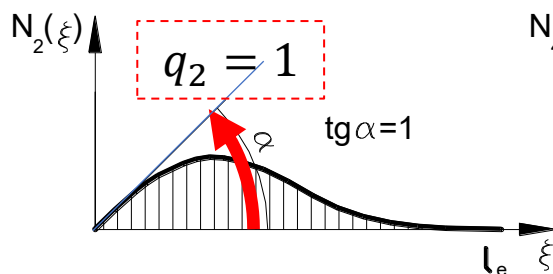
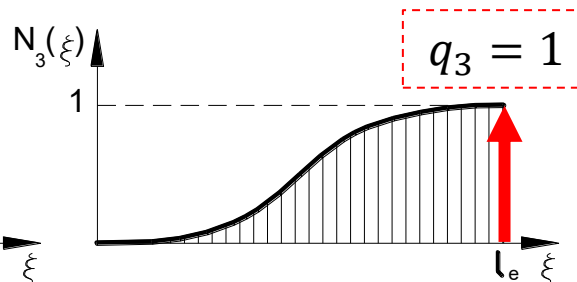
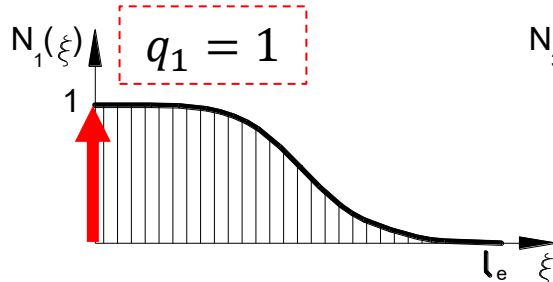
Funkcje kształtu elementu belkowego:

$$N_1(\xi) = 1 - 3\frac{\xi^2}{l_e^2} + 2\frac{\xi^3}{l_e^3},$$

$$N_2(\xi) = \xi - 2\frac{\xi^2}{l_e} + \frac{\xi^3}{l_e^2},$$

$$N_3(\xi) = 3\frac{\xi^2}{l_e^2} - 2\frac{\xi^3}{l_e^3},$$

$$N_4(\xi) = \frac{-\xi^2}{l_e} + \frac{\xi^3}{l_e^2}.$$



Element belkowy - funkcje kształtu i ich pochodne

$$N' = \frac{dN}{d\xi}, \quad N'' = \frac{d^2 N}{d\xi^2}, \quad N''' = \frac{d^3 N}{d\xi^3}$$

Dla pierwszej funkcji kształtu:

$$N_1' = -\frac{6}{l^2} \xi + \frac{6}{l^3} \xi^2, \quad N_1'' = -\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3} \xi, \quad N_1''' = \frac{12}{l^3}$$

Dla pozostałych funkcji kształtu:

$$N_2' = 1 - \frac{4}{l} \xi + \frac{3}{l^2} \xi^2, \quad N_2'' = -\frac{4}{l} + \frac{6}{l^2} \xi, \quad N_2''' = \frac{6}{l^2}$$

$$N_3' = \frac{6}{l^2} \xi - \frac{6}{l^3} \xi^2, \quad N_3'' = \frac{6}{l^2} - \frac{12}{l^3} \xi, \quad N_3''' = -\frac{12}{l^3}$$

$$N_4' = -\frac{2}{l} \xi + \frac{3}{l^2} \xi^2, \quad N_4'' = -\frac{2}{l} + \frac{6}{l^2} \xi, \quad N_4''' = \frac{6}{l^2}$$

Element belkowy – całkowita energia potencjalna

Funkcja ugięcia i jej pochodne:

$$\begin{aligned} w(\xi) &= [N(\xi)] \{q\}_e, \\ w'(\xi) &= [N'(\xi)] \{q\}_e, \\ w''(\xi) &= [N''(\xi)] \{q\}_e. \end{aligned}$$

Całkowita energia potencjalna belki o długości l_e :

$$V_e = U_e - W_{ze} = \frac{EI}{2} \int_0^{l_e} (w''(\xi))^2 d\xi - \int_0^{l_e} p(\xi) w(\xi) d\xi.$$

$$U_e = \frac{EI}{2} \int_0^{l_e} w''(\xi) w''(\xi) d\xi = \frac{EI}{2} \int_0^{l_e} [q]_e \{N''\} [N'']^T \{q\}_e d\xi =$$

$$= \frac{EI}{2} [q]_e \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} N_1'' N_1'' & N_1'' N_2'' & N_1'' N_3'' & N_1'' N_4'' \\ N_2'' N_1'' & N_2'' N_2'' & N_2'' N_3'' & N_2'' N_4'' \\ N_3'' N_1'' & N_3'' N_2'' & N_3'' N_3'' & N_3'' N_4'' \\ N_4'' N_1'' & N_4'' N_2'' & N_4'' N_3'' & N_4'' N_4'' \end{bmatrix} d\xi \{q\}_e.$$

Element belkowy – macierz sztywności

Energia sprężysta belki:

$$U_e = \frac{1}{2} [q]_e [k]_e \{q\}_e$$
$$[k]_e = EI \begin{bmatrix} \int_0^{l_e} N_1'' N_1'' d\xi & \int_0^{l_e} N_1'' N_2'' d\xi & \int_0^{l_e} N_1'' N_3'' d\xi & \int_0^{l_e} N_1'' N_4'' d\xi \\ \int_0^{l_e} N_2'' N_1'' d\xi & \int_0^{l_e} N_2'' N_2'' d\xi & \int_0^{l_e} N_2'' N_3'' d\xi & \int_0^{l_e} N_2'' N_4'' d\xi \\ \int_0^{l_e} N_3'' N_1'' d\xi & \int_0^{l_e} N_3'' N_2'' d\xi & \int_0^{l_e} N_3'' N_3'' d\xi & \int_0^{l_e} N_3'' N_4'' d\xi \\ \int_0^{l_e} N_4'' N_1'' d\xi & \int_0^{l_e} N_4'' N_2'' d\xi & \int_0^{l_e} N_4'' N_3'' d\xi & \int_0^{l_e} N_4'' N_4'' d\xi \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności elementu belkowego:

$$[k]_e = \frac{2EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l_e & -6 & 3l_e \\ 3l_e & 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 \\ -6 & -3l_e & 6 & -3l_e \\ 3l_e & l_e^2 & -3l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix}$$

Element belkowy - siły zastępcze

Praca obciążenia zewnętrznego: $W_{ze}^p = \int_0^{l_e} p(\xi) w(\xi) d\xi = \int_0^{l_e} p(\xi) [N(\xi)] \{q\}_e d\xi$

$$= \int_0^{l_e} [N_1(\xi)p(\xi), N_2(\xi)p(\xi), N_3(\xi)p(\xi), N_4(\xi)p(\xi)] \{q\}_e d\xi,$$

$$W_{ze}^p = [F_1^e, F_2^e, F_3^e, F_4^e]_e \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = [F]_e \{q\}_e$$

Węzłowe siły zastępcze od wydatku ciągłego: $F_i^e = \int_0^{l_e} N_i(\xi) p(\xi) d\xi$

Zadanie 2: siły zastępcze dla wydatku stałego

Węzłowe siły zastępcze od wydatku ciągłego: $F_i^e = \int_0^{l_e} N_i(\xi) p(\xi) d\xi$

Dla wydatku stałego:

$$F_1^e = \int_0^{l_e} N_1(\xi) \cdot p_0 \cdot d\xi = \int_0^{l_e} \left(1 - \frac{3}{l_e^2} \xi^2 + \frac{2}{l_e^3} \xi^3\right) p_0 \cdot d\xi = \frac{p_0 l_e}{2}$$

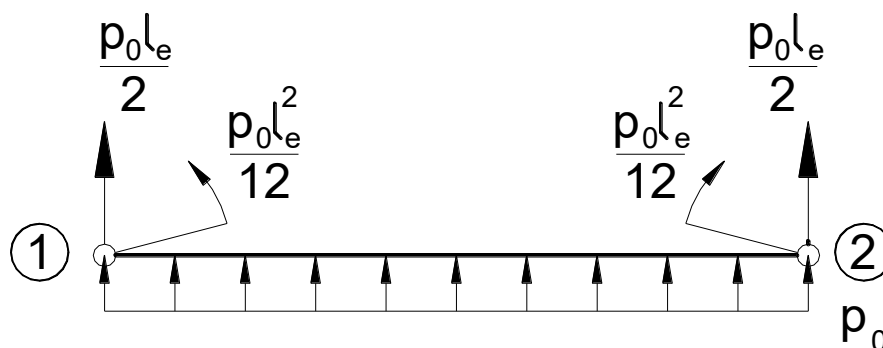
$$F_2^e = \int_0^{l_e} N_2(\xi) \cdot p_0 \cdot d\xi = \int_0^{l_e} \left(\xi - \frac{2}{l_e} \xi^2 + \frac{1}{l_e^2} \xi^3\right) p_0 \cdot d\xi = \frac{p_0 l_e^2}{12}$$

itd.

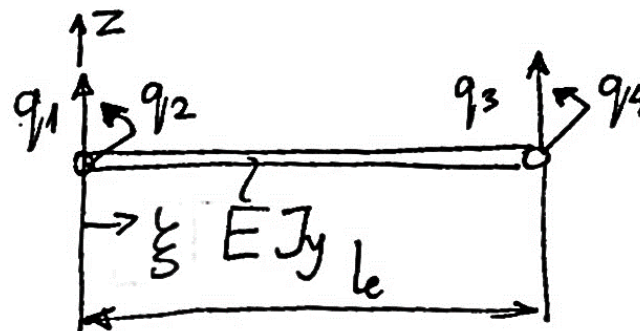
$$F_1^e = F_3^e = \frac{p_0 l_e}{2}$$

$$F_2^e = \frac{p_0 l_e^2}{12}$$

$$F_4^e = \frac{-p_0 l_e^2}{12}$$



Element belkowy – zestawienie funkcji poszukiwanych



$$\{q\}_e = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}^T$$

1×4

Ugięcie:

$$w(\xi) = \underset{1 \times 4}{[N]} \cdot \underset{4 \times 1}{\{q\}_e} - \text{Wielomian stopnia 3-go}$$

Moment
gnący:

$$M_y(\xi) = EJ_y w'' = EJ_y \underset{1 \times 4}{[N'']} \cdot \underset{4 \times 1}{\{q\}_e} - \text{Funkcja liniowa}$$

Siła
tnąca:

$$T_z(\xi) = -EJ_y w''' = -EJ_y \underset{1 \times 4}{[N''']} \cdot \underset{4 \times 1}{\{q\}_e} - \text{Funkcja stała}$$

Element belkowy – układ równań

Całkowita energia potencjalna elementu belkowego:

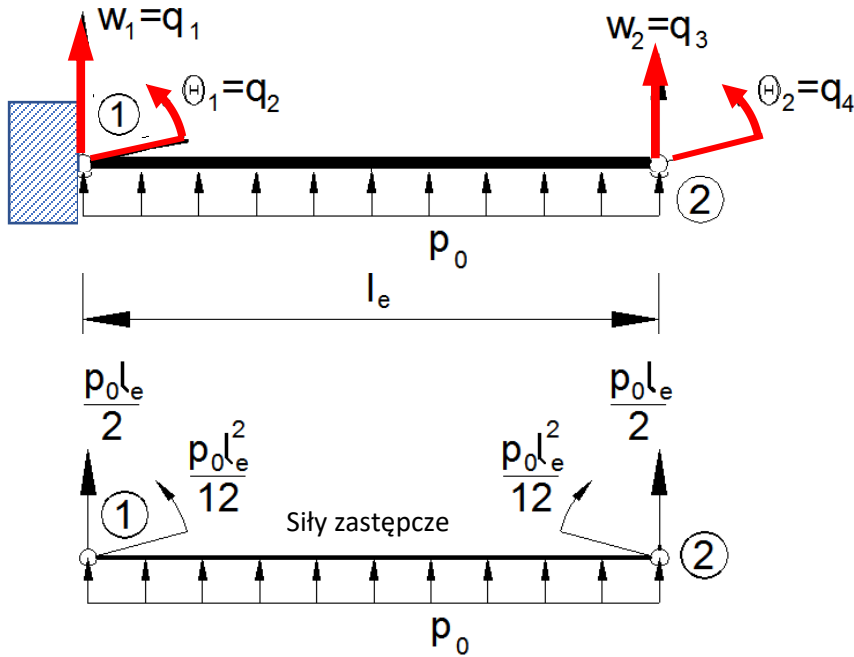
$$V_e = U_e - W_{ze} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} q \end{bmatrix}_e}_{1 \times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} k \end{bmatrix}_e}_{4 \times 4} \underbrace{\{q\}_e}_{4 \times 1} - \underbrace{\begin{bmatrix} q \end{bmatrix}_e}_{1 \times 4} \underbrace{\{F\}_e}_{4 \times 1}$$

Warunek minimalizacji całkowitej energii potencjalnej:

$$\frac{\partial V_e}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\boxed{[k]_e \{q\}_e = \{F\}_e} \quad \Rightarrow \quad \frac{2EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l_e & -6 & 3l_e \\ 3l_e & 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 \\ -6 & -3l_e & 6 & -3l_e \\ 3l_e & l_e^2 & -3l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}_e$$

Zadanie 3 belka wspornikowa obciążona stałym wydatkiem (jeden element)



Wektor parametrów węzłowych

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e$$

$$\frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & 6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \frac{p_0 l}{2} \\ -\frac{p_0 l^2}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{2EI}{l^3} (6q_3 - 3lq_4) &= \frac{p_0 l}{2}, \\ \frac{2EI}{l^3} (-3lq_3 + 2l^2 q_4) &= -\frac{p_0 l^2}{12}, \end{aligned}$$



$$q_3 = \frac{1}{8} \frac{p_0 l^4}{EI}$$

$$q_4 = \frac{1}{6} \frac{p_0 l^3}{EI}$$

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi) q_i$$



$$w(\xi) = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{6} \right) \frac{p_0 l^2}{EI} \xi^2 + \left(\frac{-2}{8} + \frac{1}{6} \right) \frac{p_0 l}{EI} \xi^3 = \frac{5}{24} \frac{p_0 l^2}{EI} \xi^2 - \frac{p_0 l}{12EI} \xi^3$$

Przykład belka wspornikowa obciążona stałym wydatkiem (jeden element)

Reakcje:

$$\frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \frac{p_0 l}{2} \\ -\frac{p_0 l^2}{12} \end{Bmatrix}$$

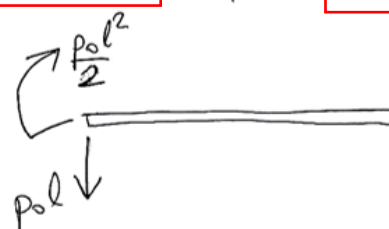
$$q_3 = \frac{1}{8} \frac{p_0 l^4}{EI}$$

$$q_4 = \frac{1}{6} \frac{p_0 l^3}{EI}$$

$$\begin{cases} \frac{2EI}{l^3} (-6 \cdot q_3 + 3l \cdot q_4) = R_1 + \frac{p_0 l}{2} \\ \frac{2EI}{l^3} (-3l \cdot q_3 + l^2 \cdot q_4) = R_2 + \frac{p_0 l^2}{12} \end{cases}$$

$$R_1 = -p_0 l$$

$$R_2 = -\frac{p_0 l^2}{2}$$

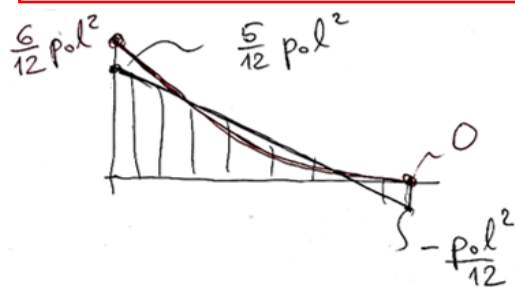


Moment gnący:

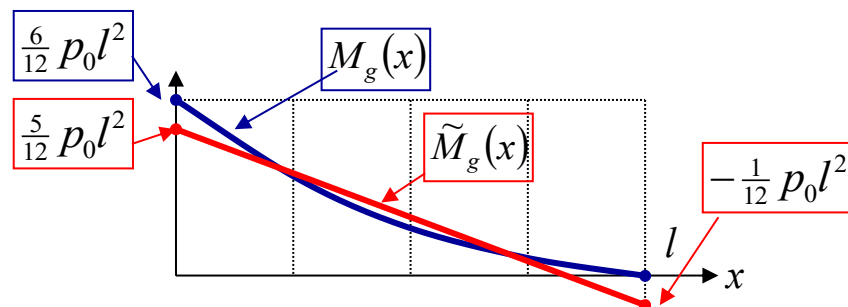
$$M_g = EJ \cdot w''(\xi) = EJ \cdot \sum_i N_i''(\xi) \cdot q_i$$

$$M_g = EJ (N_3''(\xi) \cdot q_3 + N_4''(\xi) \cdot q_4)$$

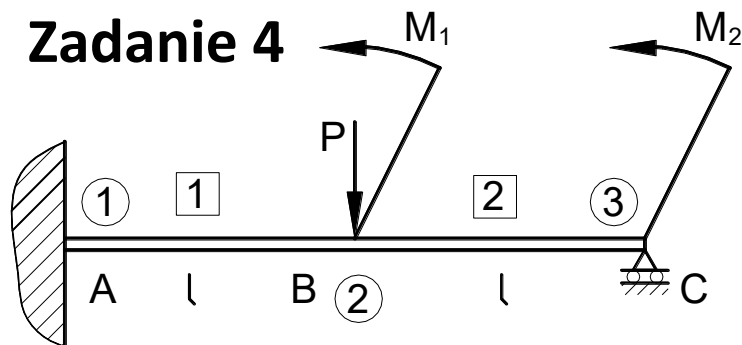
$$M_g = \frac{5}{12} p_0 l^2 - \frac{p_0 l}{2} \cdot \xi$$



Jak w rozwiązaniu Ritza !



Zadanie 4



$$[K] = \frac{2EI}{l^3}$$

6	3l	-6	3l		
3l	2l ²	-3l	l ²		
-6	-3l	6+6	-3l+3l	-6	3l
3l	l ²	-3l+3l	2l ² +2l ²	-3l	l ²
		-6	-3l	6	-3l
		3l	l ²	-3l	2l ²

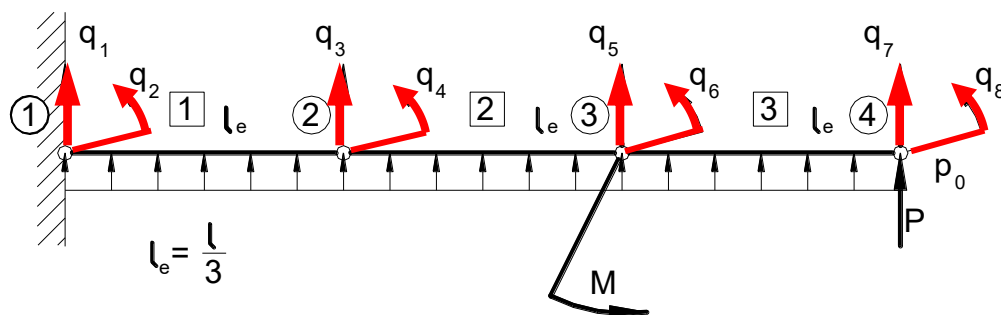
$$\{q\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_3 \\ q_4 \\ 0 \\ q_6 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ -P \\ F_5 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{2EI}{l^3} \begin{Bmatrix} 12 & 0 & 3l \\ 0 & 4l^2 & l^2 \\ 3l & l^2 & 2l^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{l}{96EI} \begin{Bmatrix} 7l^2 & 3l & -12l \\ 3l & 15 & -12 \\ -12l & -12 & 48 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -P \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Zadanie 5 belka wspornikowa obciążona stałym wydatkiem (trzy elementy)



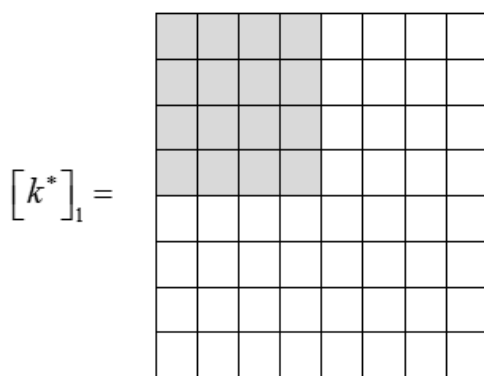
Wektor parametrów węzłowych:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ w_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

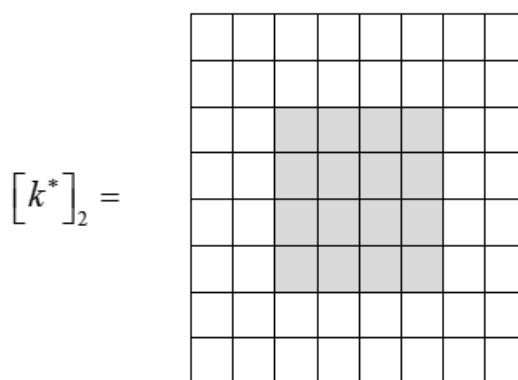
Energia sprężysta w każdym elemencie:

$$U_e = \frac{1}{2} [q]_e [k]_e \{q\}_e = \frac{1}{2} [q]_{1 \times N} [k^*]_{N \times N} \{q\}_{N \times 1}$$

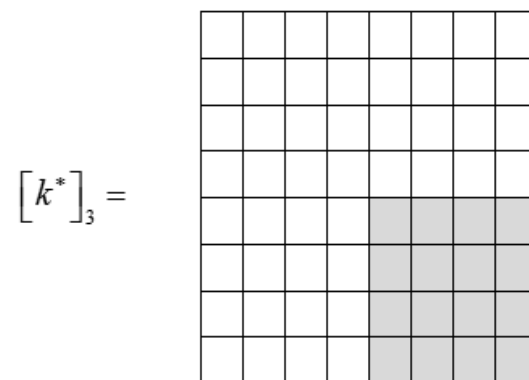
Rozszerzone macierze sztywności elementów:



q_1, q_2, q_3, q_4



q_3, q_4, q_5, q_6



q_5, q_6, q_7, q_8

Zadanie 5 belka wspornikowa obciążona stałym wydatkiem (trzy elementy)

Energia sprężysta całej belki:

$$U = \sum_{e=1}^{LE} U_e = \frac{1}{2} [q] \left(\sum_{i=1}^{LE} [k^*]_e \right) \{q\} = \frac{1}{2} [q] [K] \{q\}$$

Całkowita energia potencjalna układu:

$$V = U - W_z = \frac{1}{2} [q] [K] \{q\} - [q] \{F\}$$

Warunek minimum całkowitej energii potencjalnej układu:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$[K] \{q\} = \{F\} \quad + \text{przemieszczeniowe warunki brzegowe}$$

$$M_q(\xi) = EI w''(\xi) = EI \left[N_1'', N_2'', N_3'', N_4'' \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e, \quad M_q(\xi) = \left[\frac{12}{l_e^3} \left(\xi - \frac{l_e}{2} \right) q_1 + \frac{6}{l_e^2} \left(\xi - \frac{2}{3} l_e \right) q_2 - \frac{12}{l_e^3} \left(\xi - \frac{l_e}{2} \right) q_3 + \frac{6}{l_e^2} \left(\xi - \frac{l_e}{3} \right) q_4 \right] EI,$$

$$T(\xi) = -EI w'''(\xi) = EI \left[N_1''', N_2''', N_3''', N_4''' \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e. \quad T(\xi) = - \left[\frac{12}{l_e^3} (q_1 - q_3) + \frac{6}{l_e^2} (q_2 + q_4) \right] EI.$$

Zadanie 5 belka wspornikowa obciążona stałym wydatkiem (trzy elementy)

k_{11}^1	k_{12}^1	k_{13}^1	k_{14}^1	0	0	0	0
k_{21}^1	k_{22}^1	k_{23}^1	k_{24}^1	0	0	0	0
k_{31}^1	k_{32}^1	$k_{33}^1 + k_{11}^2$	$k_{34}^1 + k_{12}^2$	k_{13}^2	k_{14}^2	0	0
k_{41}^1	k_{42}^1	$k_{43}^1 + k_{21}^2$	$k_{44}^1 + k_{22}^2$	k_{23}^2	k_{24}^2	0	0
0	0	k_{31}^2	k_{32}^2	$k_{33}^2 + k_{11}^3$	$k_{34}^2 + k_{12}^3$	k_{13}^3	k_{14}^3
0	0	k_{41}^2	k_{42}^2	$k_{43}^2 + k_{21}^3$	$k_{44}^2 + k_{22}^3$	k_{23}^3	k_{24}^3
0	0	0	0	k_{31}^3	k_{32}^3	k_{33}^3	k_{34}^3
0	0	0	0	k_{41}^3	k_{42}^3	k_{43}^3	k_{44}^3

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix}$$

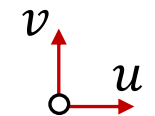
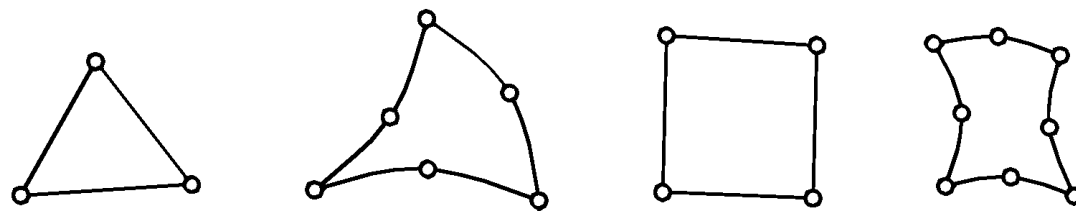
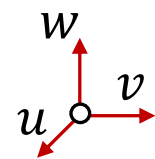
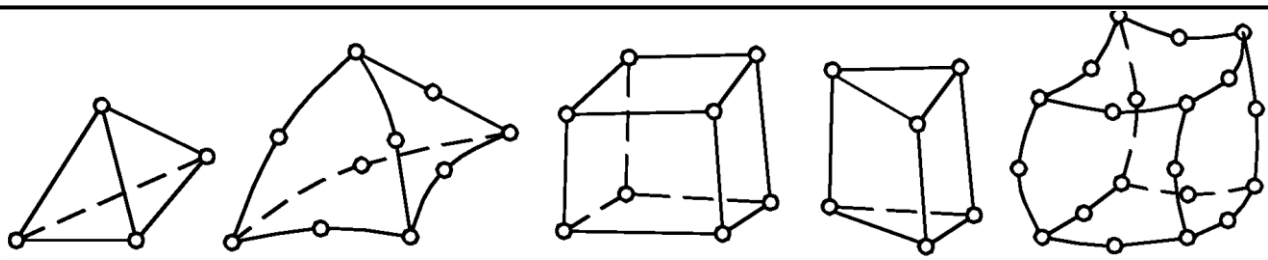
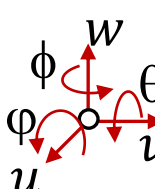
$\frac{2EI}{l_e^3}$	6	$3l_e$	-6	$3l_e$	0	0	0	0
	$3l_e$	$2l_e^2$	$-3l_e$	l_e^2	0	0	0	0
	-6	$-3l_e$	12	0	-6	$3l_e$	0	0
	$3l_e$	l_e^2	0	$4l_e^2$	$-3l_e$	l_e^2	0	0
	0	0	-6	$-3l_e$	12	0	-6	$3l_e$
	0	0	$3l_e$	l_e^2	0	$4l_e^2$	$-3l_e$	l_e^2
	0	0	0	0	-6	$-3l_e$	6	$-3l_e$
	0	0	0	0	$3l_e$	l_e^2	$-3l_e$	$2l_e^2$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ p_0 l_e \\ 0 \\ p_0 l_e \\ M \\ P + \frac{p_0 l_e}{2} \\ \frac{-p_0 l_e^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Typowe obliczenia MES

1. Wyznaczenie macierzy sztywności elementów $[k]_e$
2. Agregacja macierzy elementów w macierzy globalnej $[K]$
3. Wyznaczenie wektora obciążeń zastępczych $\{F\}$
4. Wprowadzenie warunków brzegowych – wyznaczenie wszystkich poszukiwanych parametrów $\{q\}$
5. Wyznaczenie sił wewnętrznych (momentów i sił tnących) oraz naprężeń normalnych i stycznych

Przykłady elementów skończonych

Typ	n_e – liczba stopni swobody w elemencie skończonym
pręty	 2, 4, 6 6
2D 	 6 12 8 16
3D 	 12 30 24 18 60
shell 	 24 48

Elementy rachunku macierzowego

Przedstawione poniżej informacje stanowią krótkie przypomnienie elementów rachunku macierzowego niezbędne dla zrozumienia podstaw metody elementów skończonych.

Macierzą prostokątną $[a_{ik}]$ o wymiarach $m \times n$ nazywamy funkcję, która każdej uporządkowanej parze zmiennych naturalnych (i, k) , $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą a_{ik} . Macierz zapisujemy w postaci tablicy prostokątnej mającej m wierszy i n kolumn:

$$\underset{m \times n}{[A]} = \underset{m \times n}{[a_{ij}]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

W przypadku, gdy $m = n$ macierz nazywamy kwadratową.

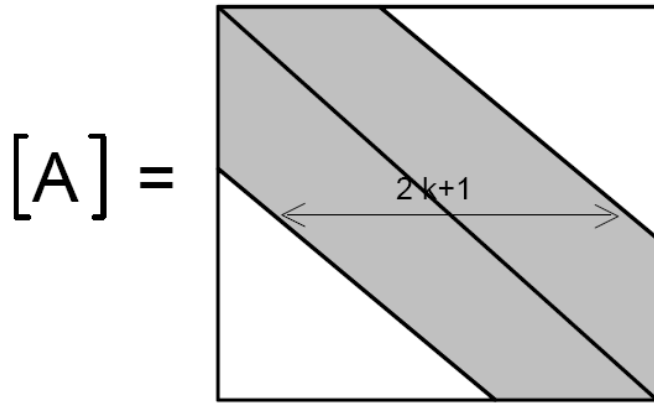
Macierzą diagonalną nazywamy macierz kwadratową, w której wszystkie elementy poza leżącymi na głównej przekątnej (diagonali) są równe zeru ($a_{ij} = 0$, $i \neq j$).

Macierz $\underset{m \times 1}{[A]}$ nazywać będziemy wektorem-kolumną i oznaczać $\{A\} = \{a_i\}$ $i = 1, 2, \dots, m$.

Macierz $\underset{1 \times n}{[A]}$ nazywać będziemy wektorem-wierszem i oznaczać $[A] = [a_i]$ $i = 1, 2, \dots, n$.

Elementy rachunku macierzowego

Macierzą pasmową nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie niezerowe elementy leżą na przekątnej głównej (diagonali) i w k równoległych do diagonali liniach z każdej strony ($a_{jj} = 0$ jeśli $|i - j| > k$). $(2k + 1)$ – szerokością pasma macierzy $[A]$



Macierzą jednostkową o wymiarze n nazywamy macierz diagonalną o jednostkowych elementach niezerowych

$$[I] = [\delta_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\delta_{ik} = 1 \text{ gdy } i = k, \delta_{ik} = 0, \text{ gdy } i \neq k.$$

Macierzą transponowaną macierzy $[A] = [a_{ik}]$ nazywamy macierz $[A]^T = [a_{ki}]$ powstałą

przez przestawienie wierszy i kolumn. W szczególności mamy $[q]^T = \{q\}$ i $\{q\}^T = [q]$.

Macierzą symetryczną nazywamy macierz kwadratową, dla której $[A]^T = [A]$ ($a_{ik} = a_{ki}$).

Podstawowe działania na macierzach

Sumą macierzy $[A] = [a_{ik}]_{m \times n}$ i $[B] = [b_{ik}]_{m \times n}$ nazywamy macierz $[C] = [a_{ik} + b_{ik}]_{m \times n}$.

Operacja dodawania macierzy wymaga zgodności wymiarów macierzy składowych.

Iloczynem macierzy $[A] = [a_{ik}]_{m \times n}$ przez liczbę rzeczywistą λ nazywamy macierz $[B] = [\lambda a_{ik}]_{m \times n}$

Iloczynem macierzy $[A] = [a_{ik}]_{m \times n}$ przez macierz $[B] = [b_{ik}]_{n \times p}$ nazywamy macierz $[C] = [c_{ik}]_{m \times p}$

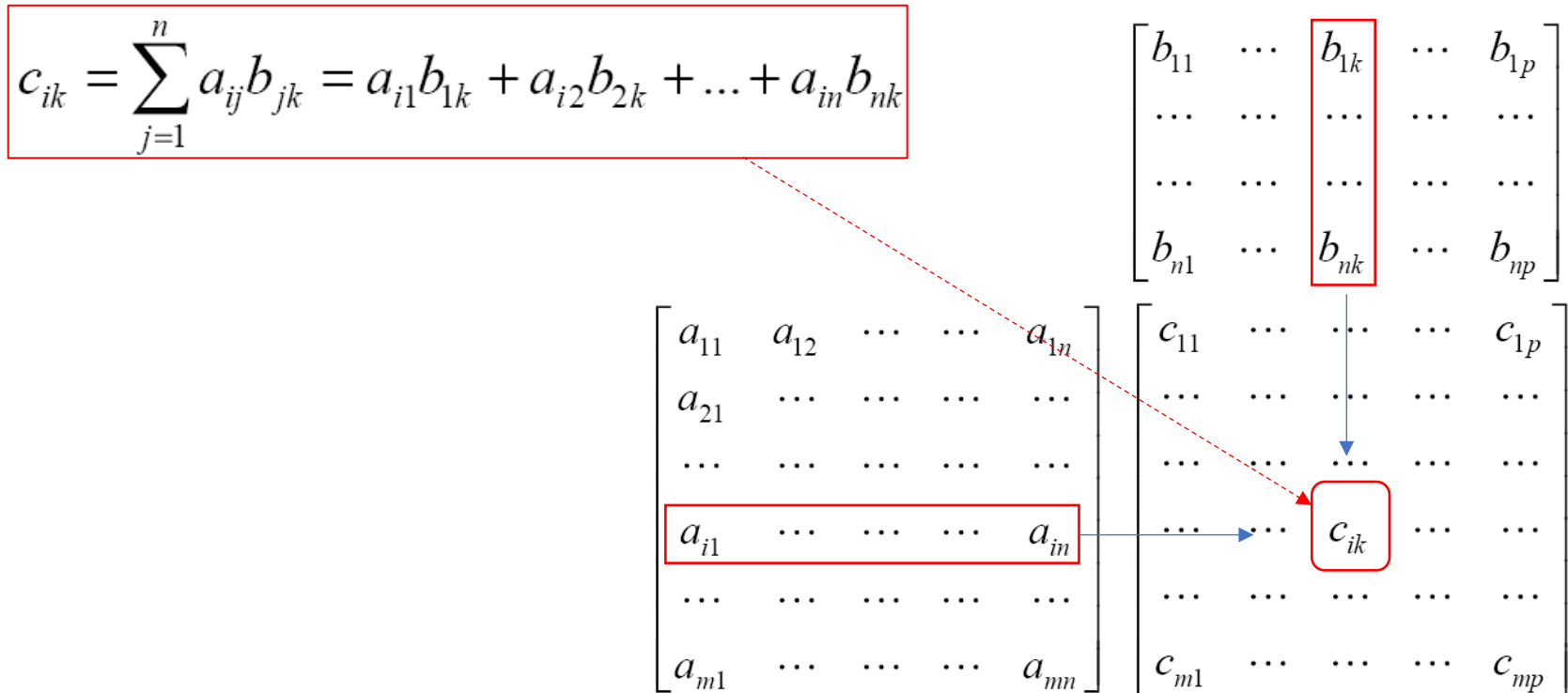
taką, że:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m, \\ k = 1, 2, \dots, p. \end{matrix} \quad (\text{D.3})$$

Mnożenie macierzy jest możliwe jedynie w przypadku, gdy liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy.

Mnożenie macierzy nie jest przemienne ($[A][B] \neq [B][A]$).

Mnożenie macierzy schematem Falka



Wybrane własności działań na macierzach

1. $[A] \cdot ([B] \cdot [C]) = ([A] \cdot [B]) \cdot [C]$
2. $\alpha[A] \cdot [B] = (\alpha[A]) \cdot [B] = [A] \cdot (\alpha[B])$
3. $([A] \cdot [B])^T = [B]^T [A]^T$

Wyznacznik macierzy

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $[A] = [a_{ik}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\det[A]$, która zdefiniowana jest przez związki

- 1) dla $n = 1$ $\det[A]_{1 \times 1} = a_{11}$
- 2) dla $n = 2$ $\det[A]_{2 \times 2} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ (D.7)

- 3) dla $n \geq 3$ wyznacznik obliczyć można wybierając dowolny wiersz r i stosować tzw. rozwinięcie Laplace'a

$$\det[A] = a_{r1}\alpha_{r1} + a_{r2}\alpha_{r2} + \dots + a_{rn}\alpha_{rn} = \sum a_{rj}\alpha_{rj} \quad (\text{D.8})$$

α_{rj} nazywamy dopełnieniem algebraicznym elementu a_{rj} macierzy $[A]$ i obliczamy wg wzoru

$$\alpha_{rj} = (-1)^{r+j} \det[M_{rj}] \quad (\text{D.9})$$

gdzie $[M_{rj}]$ jest podmacierzą macierzy $[A]$ powstałą przez wykreślenie r -tego wiersza i j -tej kolumny macierzy $[A]$.

W szczególności dla $n = 3$ otrzymamy wybierając $r = 1$

$$\det[A] = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

Macierz, której wyznacznik jest równy zeru nazywamy macierzą osobliwą.

Elementy rachunku macierzowego

Rzędem macierzy A nazywamy największy wymiar podmacierzy kwadratowej powstałej przez wykreślenie części wierszy i kolumn, dla której wyznacznik jest różny od zera. Rzędem macierzy nieosobliwej o wymiarze n jest więc n . Rząd macierzy osobliwej jest mniejszy niż jego wymiar.

Wybrane własności wyznacznika:

1. Jeżeli jakiegokolwiek dwa wiersze (kolumny) są liniowo zależne (dają się przedstawić w postaci liniowej kombinacji pozostałych) to wartość wyznacznika jest równa zeru.
2. $\det[A] = \det[A]^T$.
3. Wyznacznik macierzy diagonalnej jest równy iloczynowi jej elementów diagonalnych.
4. $\det([A] \cdot [B]) = \det[A] \cdot \det[B]$.

Macierz odwrotna. Układ równań liniowych

Macierzą odwrotną nieosobliwej macierzy $[A]_{n \times n}$ nazywamy macierz $[A]^{-1}$ taką, że

$$[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} [A] = [I] = [\delta_{ik}].$$

Istnieje dokładnie jedna macierz odwrotna macierzy nieosobliwej

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det A} [\alpha_{ik}]^T,$$

gdzie α_{ik} są dopełnieniami algebraicznymi elementów a_{ik} macierzy $[A]$.

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

zapisać można w postaci macierzowej

$$\begin{matrix} [A] & \{x\} & = & \{b\} \\ m \times n & n \times 1 & & m \times 1 \end{matrix}$$

Układ nazywamy sprzecznym, gdy nie posiada żadnego rozwiązania, oznaczonym - gdy posiada dokładnie jedno rozwiązanie, albo nieoznaczonym, gdy posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykłady

PRZYKŁAD 1

Niech $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. Obliczmy $[A] \cdot [A]^T$.

Według schematu Falka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{czyli } [C] = [A] \cdot [A]^T = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 17 \\ 11 & 25 & 39 \\ 17 & 39 & 61 \end{bmatrix}.$$

Przykłady

PRZYKŁAD 3

Niech $[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć $[A]^{-1}$.

Wyznaczamy najpierw wartość wyznacznika:

$$\det[A] = 2 \cdot (-1)^2 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 1 \cdot (-1)^3 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 1 \cdot (-1)^4 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 2 - 1 = 1$$
$$\det[A] = 1.$$

Oznacza to, że istnieje macierz odwrotna. Macierz dopełnień algebraicznych jest w tym przypadku równa:

$$[\alpha_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Stąd } [A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} [\alpha_{ik}]^T$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy:

$$[A] \cdot [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I].$$

Przykłady

sposób zapisu lokalnego wektora parametrów węzłowych

wektor – kolumna

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix}_e$$

$n_e \times 1$

wektor – wiersz

$$[q]_e = [u_1, v_1, w_1, \dots, u_n, v_n, w_n,]_e$$

$1 \times n_e$